

einen von 1 verschiedenen Teiler mit p^n : $p, 2p, 3p, 4p, \dots, p^{n-1} \cdot p = p^n$. Dies sind p^{n-1} Zahlen. Die anderen Zahlen zwischen 1 und p^n sind teilerfremd zu p^n . Ihre Anzahl ist: $p^n - p^{n-1} = p^n(1 - \frac{1}{p})$.

Satz („Produktformel“): Die natürliche Zahl n ($n > 1$) habe die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r}$. Dann ist $\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_r})$.

Beweis: Wegen der Multiplikativität der Eulerschen Funktion gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r}) = \varphi(p_1^{m_1}) \cdot \varphi(p_2^{m_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_r^{m_r}) \\ &= p_1^{m_1} \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot p_2^{m_2} \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \dots \cdot p_r^{m_r} \cdot (1 - \frac{1}{p_r}) \\ &= n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{p_r}) \end{aligned}$$

Satz („Summenformel“): Für jede natürliche Zahl n gilt $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Ein Beispiel: $n = 12$

Teiler von 12:	$d =$	1	2	3	4	6	12
	$\varphi(d) =$	1	1	2	2	2	4

Beweis der Summenformel: Zunächst sei an das folgende Ergebnis aus Kapitel 3

erinnert (vgl. GGT-10): Ist $d = GGT(a, b)$, so ist $GGT(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

Wir zerlegen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ in disjunkte Klassen. Die Klassen sind so definiert, dass zu jedem Teiler t von n diejenigen Elemente x in einer Klasse zusammengefaßt werden, für die $GGT(x, n) = t$ ist.

Dies sei zunächst am Beispiel $n = 20$ und $t = 4$ erläutert: $GGT(x, 20) = 4$ ist erfüllt für die Zahlen 4, 8, 12 und 16; man erhält so die Klasse $A_4 = \{4, 8, 12, 16\}$.

Führt man Entsprechendes mit jedem Teiler von n durch, so erhält man eine Klasseneinteilung, die im Falle $n = 20$ folgendermaßen tabellarisch dargestellt werden kann: