Elementare Zahlentheorie

Beispiele, Geschichte, Algorithmen

Jochen Ziegenbalg

Inhalt

Vorwort

Die „Erfindung“ des Zählens stellt eine der faszinierendsten Leistungen des menschlichen Geistes dar; Zahlen und Zahlschreibweisen sind eng mit unserer Kulturgeschichte verwoben. Ohne Zahlen gäbe es (ob zum Besseren oder zum Schlechteren sei dahingestellt) keine Mathematik, keine Naturwissenschaften, keine Technik, keine Medizin und keine Ingenieurwissenschaften in der Form, wie wir sie kennen. Die vom Menschen geprägte Welt wäre eine völlig andere.

Zahlen sind einfach und kompliziert zugleich. Das Zählen stellt sich beim Menschen „fast automatisch“ ein; die meisten Kinder können schon zählen, bevor sie in die Schule kommen. Aber die Zahlen sind zugleich auch der Stoff, der (zusammen mit der räumlichen Anschauung) den menschlichen Geist zu Spekulationen anregt, deren Untersuchung zu den hochgradig abstrakten Strukturen der modernen Mathematik geführt hat.

Zahlen sind zugleich anschaulich und abstrakt. Vermutungen über zahlentheoretische Gesetzmäßigkeiten entstehen oft durch das Betrachten von konkreten Beispielen und insbesondere von strukturierten Punkt- oder Flächenmustern, den sogenannten „figurierten“ Zahlen. Der Satz des Pythagoras gab so Anlass zur Fermatschen Vermutung, welche die Mathematiker Jahrhunderte lang beschäftigte und die Entwicklung zur modernen abstrakten Algebra maßgeblich beeinflusste.

Zahlen machen Spaß. Spiele mit Zahlen und Zahlenrätsel faszinieren immer wieder Menschen aus allen Altersschichten und mit der unterschiedlichsten Vorbildung.

Das Thema „Zahlen“ ist zugleich alt und jung. Schon die frühesten menschlichen Kulturen verfügten über Zahlen (man kann sich fragen, ob es ohne Zahlen überhaupt menschliche Kulturen geben würde) und einige der bemerkenswertesten jüngsten Ergebnisse der Wissenschaft sind Ergebnisse über Zahlen.

Der vorliegende Text ist aus einem Manuskript zur Vorlesung „Basiswissen Zahlentheorie“ hervorgegangen, die ich an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe gelesen habe. Er stellt einen ersten Einstieg in die Zahlentheorie dar und ist die Basis für vielfältige Ausbaumöglichkeiten. Besondere Zielsetzungen für die Konzeption der Vorlesung wie auch dieses Textes waren: Elementarität und Anschaulichkeit, die Berücksichtigung der historischen Entwicklung, Motivation und Orientierung an konkreten Beispielen – dies soll auch der Titel des Buches zum Ausdruck bringen.

Von Wittgenstein stammt der Ausspruch „*Wenn du wissen willst, was ein Satz besagt, schau nach, was sein Beweis beweist.*“. So richtig, wie dies grundsätzlich ist, so ergänzungsbedürftig ist es im Hinblick auf das Erlernen von Mathematik bei Menschen, die keine Berufsmathematiker sind, also z.B. bei den Studenten, mit denen ich es meist zu tun habe bzw. deren Schülern. Formale mathematische Beweise sind für sie oft undurchsichtige Rituale. Wirkliches Verständnis kommt bei ihnen selten aus einem abstrakten Beweis sondern viel öfter aus einem gut ausgewählten, typischen Beispiel. Die richtigen Beispiele auszuwählen, ist eine Kunst; gute Beispiele geben der Mathematik etwas von der Sinnlichkeit des Lebens. Manche Wissenschafts-Schulen der Mathematik sind geneigt, die Bedeutung von Beispielen herunterzuspielen. Für die Phasen des Mathematik-*Lernens* meine ich im Gegensatz dazu, dass die Bedeutung guter Beispiele kaum überbetont werden kann.

Ein weiteres Merkmal dieser Einführung in die elementare Zahlentheorie ist nicht zuletzt auch die bewusste *inhaltliche Beschränkung*. Der Umfang dieser Darstellung entspricht etwa dem, was ich im Sommersemester in einer einführenden Lehrveranstaltung von 2 Semesterwochenstunden behandeln kann. Im Rahmen des Vorlesungsprogramms an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe ist dies ein Baustein, auf dem in anderen Lehrveranstaltungen aufgebaut werden kann.

Möglichkeiten zur Weiterführung, Vertiefung und zum Ausbau sind in vielfältiger Weise gegeben; hier einige Anregungen:

- Faszination Zahl: Figurierte Zahlen, Fibonacci Zahlen, Pythagoreische Zahlen, vollkommene Zahlen, befreundete Zahlen, Primzahlen
- Zahlen in Natur und Kultur: der Goldene Schnitt, Phyllotaxis (die Lehre von den Blatt-Ständen von Pflanzen), Zahlen und Kalender (historisches Beispiel: Ermittlung des Osterdatums nach Gauß)
- Praktische Anwendungen: Prüfziffern (EAN, ISBN, ...), Geheimcodes, Verschlüsselungssysteme (insbesondere: Public Key Cryptography, RSA Verfahren), Primzahltests, Kalenderrechnungen, Planung von Tournieren, Partitionen
- Zahlentheoretische Spielereien: Kartentricks mit zahlentheoretischen Erklärungen, Magische Quadrate, Zahlentheorie zur Ermittlung von Gewinnstrategien in Spielen aller Art (z.B. NIM), Auszählverfahren
- Bruch-Zahlen: ägyptische Brüche, Dezimal- und Systembrüche, Kettenbrüche, Irrationalität, Kommensurabilität
- Zahlentheoretische Vertiefungen: Diophantische Gleichungen, zahlentheoretische Funktionen, Primzahlsätze, Siebmethoden, Gitterpunktverfahren, quadratische Reste
- Algebra: Restklassenringe, Gruppe der primen Restklassen, Quadratische Erweiterungen, Ring (bzw. Körper) der Gaußschen Zahlen, Polynomringe, Euklidische Ringe, Hauptidealringe, faktorielle Ringe, Integritätsringe
- Zahlentheorie und Informatik (algorithmische Zahlentheorie): Algorithmen in der Zahlentheorie, Zahlentheorie in Codierung und Kryptologie
- Geschichte der Mathematik: Entstehung der Zahlsysteme, zahlentheoretische Fragestellungen in Antike, Mittelalter, Renaissance und Neuzeit