Sitzverteilungen aus algorithmischer Sicht

von Christian Stellfeldt

1. Einleitung

Die Bedeutung des Themas Wahlen im Fach Gemeinschaftskunde, Politik oder Sozialkunde liegt in einem demokratischen Staat auf der Hand und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung; oft wird jedoch nur unzureichend über Wahlverfahren informiert. Nur die wenigsten unserer Zeitgenossen können mit dem Stichwort d'Hondt etwas anfangen, bestenfalls mit dem Wort, schon gar nicht im Detail. Zugegeben, ob man sich für das eine oder das andere Verfahren entscheidet, es wird sich immer nur höchstens um ein paar Sitze handeln. Politiker sehen das allerdings nicht immer so gelassen.

Welche Bedeutung haben Mandatsverteilungsverfahren im Informatikunterricht? Reicht es nicht aus, sie nur im Gemeinschaftskunde-, Politik- oder Sozialkundeunterricht zu behandeln?

Aus didaktischer Sicht gibt es mehrere Gründe, z.B:

- Das d'Hondtsche Verfahren ist ein Beispiel aus der realen Welt und nicht ein „künstliches“ und konstruiertes Beispiel, nur um den Umgang mit Tabellenkalkulation und Algorithmen zu üben.
- Das Thema „Wahlverfahren“ ist ein typisches Beispiel für fächerübergreifenden Unterricht (Gemeinschaftskunde, Mathematik, Informatik); es ist hochgradig beziehungshaltig.
- Mit Hilfe des d'Hondtschen Verfahrens kann das operative Prinzip, im Sinne von „was passiert wenn“, hervorragend umgesetzt werden. Die Tabellenkalkulation bietet hier ein mächtiges Werkzeug an, das den Blick auf diese Fragen vereinfacht.

An dieser Stelle ein Zitat von HARTMUT VON HENTIG aus dem neuen Bildungsplan 2004 für die Hauptschule/Werkrealschule des Landes Baden-Württemberg (vgl. S. 9 – 10):

> *" ... Der Bildungsplan 2004 der Landesregierung muss auf der Gleichheit aller drei Aufträge bestehen - der Ausbildung der Gesamtpersönlichkeit der Schülerinnen und Schüler, der Überlebensfähigkeit der Gesellschaft und der Übung der jungen Menschen in der Rolle des Bürgers unserer Republik, des entstehenden Europa, der zukünftigen Weltgemeinschaft. ... "*

Zur Erfüllung des dritten Auftrages gehört die Erziehung zu einem verantwortungsbewußten Bürger, der ein Grundverständnis über Parteien und Wahlen verfügt. Dazu gehören auch grundlegende Kenntnisse unseres Parteien- und Wahlsystems.

Nehmen wir nun einmal an, dass bei einer Landtagswahl eine feststehende Anzahl von Sitzen vorgegeben sei. Was passiert bei einer Landtagswahl oder ganz allgemein bei einer Verhältniswahl, wenn z.B. eine Partei aufgrund ihres Stimmenanteils rechnerisch 12,6 von 100 Mandaten erringt? Wie viele Mandate stehen ihr dann zu, 12 oder 13 ?

In Deutschland sind für Landtags- und Kommunalwahlen hauptsächlich zwei Auszählverfahren verbreitet, die u.a. mit einer 5 %-Klausel verknüpft sind, von der in diesem Beitrag abgesehen wird: das *d'Hondtsche Verfahren*, auf das in diesem Beitrag besonders eingegangen wird, und das System nach *Hare*/*Niemeyer*. Beide Verfahren stellen Beispiele für Algorithmen aus dem Alltag dar. Daneben gibt es noch ein drittes Verfahren, nämlich das nach *Sainte Laguë*, mit dem die Ausschüsse des Deutschen Bundestags ermittelt werden.
In den USA heißt das erste Verfahren nach *Thomas Jefferson* und das zweite nach *Alexander Hamilton*.

Teilweise werden innerhalb eines Bundeslandes, z.B. in Bayern, die beiden ersten Verfahren nebeneinander verwendet, d.h. für die Landtagswahl das System nach *Hare*/*Niemeyer* und für Kommunalwahlen jedoch das *d'Hondtsche* Verfahren.

Die Verhältniswahl ist historisch in die französische Revolution von 1789 einzuordnen und betont besonders das Grundprinzip der „Gleichheit“. Die Verhältniswahl ist in zweifacher Weise zu verstehen. Sie bezeichnet zum einen das Entscheidungsprinzip und zum anderen das Repräsentationsprinzip. Als Entscheidungsprinzip bedeutet die Verhältniswahl die Vergabe der Mandate nach dem Verhältnis der Stimmen zueinander. Als Repräsentationsprinzip liegt der Verhältniswahl die Zielvorstellung zugrunde, im Parlament ein getreues (partei-)politisches Abbild der Wählerschaft entstehen zu lassen, wobei jede Stimme den gleichen Erfolgswert besitzt. Die Hauptfunktion des Verhältniswahlsystems besteht somit in einer möglichst getreuen Widerspiegelung der in der Wählerschaft bestehenden gesellschaftlichen Kräfte (vgl. WOYKE, 1996).

2. Die Verfahren von d’Hondt und Hare/Niemeyer

2.1 Das d’Hondtsche Verfahren in Gesetzen und Lexika

Für die Landesparlamente von Baden-Württemberg, Niedersachsen, Saarland, Sachsen und Schleswig-Holstein gilt derzeit dieses Verfahren. Aber wie funktioniert es eigentlich?

Im § 3 (3) des Landeswahlgesetzes von Schleswig-Holstein findet man eine Erklärung:

> *„Für die Verteilung der nach Landeslisten zu besetzenden Sitze werden die für jede Landesliste einer am Verhältnisausgleich teilnehmenden Partei abgegebenen gültigen Zweitstimmen zusammengezählt. Anhand der Gesamtstimmenzahlen wird für jede ausgleichsberechtigte Partei nach der Reihenfolge der Höchstzahlen, die sich durch Teilung durch 1, 2, 3, 4 usw. ergibt (Höchstzahlenverfahren), festgestellt, wie viele der ... verbleibenden Sitze auf sie entfallen (verhältnismäßiger Sitzanteil). Über die Zuteilung des letzten Sitzes entscheidet*

bei gleicher Höchstzahl das von der Landeswahlleiterin oder dem Landeswahlleiter zu ziehende Los."

Für denjenigen, der das d'Hondtsche Verfahren bereits kennt, ist diese Erklärung überflüssig, aber jemand, der das Verfahren noch nicht kennt, kann immer noch nicht so richtig etwas damit anfangen. Vielleicht verschafft ein Blick in ein paar allgemeine Lexika etwas mehr Klarheit:

DER GROSSE BROCKHAUS IN EINEM BAND, 2003:
*„..[nach V. d'Hondt, *1841, †1901], relativ einfach anzuwendendes Verfahren zur Errechnung der Abgeordnetensitze bei der Verhältniswahl."*

Das Verfahren ist offenbar nach einer Person benannt, von der wir auch wissen, wann sie gelebt hat und für welchen Zweck das Verfahren gedacht ist. Mehr ist aus dieser Erklärung leider nicht zu entnehmen.

BROCKHAUS ENZYKLOPÄDIE IN VIERUNDZWANZIG BÄNDEN, 5. BAND, 1988:
*„...von dem Prof. der Rechtswissenschaften an der Univ. Gent, Victor d'Hondt (*1841, †1901) 1882 entwickelten Berechnungsmodus für die Verteilung der Sitze in Vertretungskörperschaften bei der Verhältniswahl. Dabei wird die (jeweilige) Anzahl der für die einzelnen Parteien (Listen) abgegebenen gültigen Stimmen nacheinander durch 1, dann durch 2, durch 3 usw. dividiert, so daß man Reihen (für jede Partei eine) von Quotienten erhält. Die Verteilung der Sitze erfolgt dann in der Reihenfolge der Höhe dieser Quotienten. Die Divisionsreihe wird so lange fortgesetzt, bis die Reihenfolge so vieler Quotienten feststeht, wie Sitze zu vergeben sind (100 zu vergebende Sitze entfallen also auf die 100 höchsten Quotienten).*
Beispiel: Im Wahlkreis sind 10 Abg. zu wählen. Bei der Wahl werden für die Partei A 4160, die Partei B 2280 und die Partei C 2460 Stimmen abgegeben:

Divisor		*Quotienten*	
	Partei A	*Partei B*	*Partei C*
1	*4160 (1.)*	*3380 (2.)*	*2460 (3.)*
2	*2080 (4.)*	*1690 (5.)*	*1230 (7.)*
3	*1387 (6.)*	*1127 (8.)*	*820*
4	*1040 (9.)*	*845 (10.)*	*615*
5	*832*	*676*	*492*

Demgemäß erhalten die Parteien A und B je 4, die Partei C erhält 2 Sitze (in Klammer: Reihenfolge der Sitze.) ... "

Abstrakte Gesetzestexte und Erklärungen in Lexika hin oder her, es geht doch nichts über ein konkretes Beispiel.

2.2 Algorithmische Beschreibung des d'Hondtschen Verfahren

Eine umgangssprachliche Beschreibung könnte im konkreten Fall bei fünf wahlberechtigten Parteien und elf zu verteilenden Sitzen wie folgt aussehen:

1. Erstelle eine Tabelle wie folgt aus 11 Zeilen und 5 Spalten. Diese Tabelle wollen wir im Folgenden als d'Hondt-Tableau bezeichnen.
2. Schreibe die absoluten Stimmenzahlen in die erste Zeile.
3. Teile die absoluten Stimmenzahlen jeweils durch 2 und schreibe die Ergebnisse in die 2. Zeile.
4. Teile die absoluten Stimmenzahlen jeweils durch 3 und schreibe die Ergebnisse in die 3. Zeile.
5. Führe dieses Verfahren sinngemäß bis zur 11. Zeile fort.
6. Ermittle die 11 größten Zahlen und die jeweils zugehörigen Parteien im d'Hondt-Tableau.
7. Stelle fest, wie oft jede Partei im 6. Schritt genannt wird. Jeder Nennung entspricht einem Sitz.

Es liegt nahe, solch eine Beschreibung in eine Programmiersprache umzusetzen Als Beispiel für ein frei programmierbares System wird hier das **Computeralgebrasystem** *Mathematica* verwendet.
Eine Bemerkung vorweg: Es geht hier nicht um eine möglichst elegante (im Sinne von laufzeit- und und speichereffiziente) Lösung, vielmehr soll der Fokus eher auf eine kognitiv effiziente, d.h. auf eine möglichst einfach durchschaubare Lösung, die auch mit elementaren Kenntnissen erarbeitet werden kann, gelenkt werden. Selbstverständlich ließe sich dieser Algorithmus auch in eine andere klassische Programmiersprache umsetzen.

```
DHondt[Wahlergebnis_,Sitze_]:=
      (*Vereinbarung von lokalen Hilfsvariablen*)
            Module[{Quotientenliste = {}, i, j, pos,
             SitzeProPartei = {0,0,0,0,0}, z},
      (*Erstellung des d'Hondt-Tableaus*)
            Do[
            Do[AppendTo[Quotientenliste, Part[Wahlergebnis, i]/j],
                  {i, 5}], {j, Sitze}];
      (*Ermittlung der Sitze pro Partei*)
            Do[pos = Position[Quotientenliste, Max[Quotientenliste]];
            (*Losentscheid bei gleichen Quotienten*)
                  If[Length[pos] > 1,
                  z = Random[Integer, {1, Length[pos]}], z = 1];
            pos = Part[Part[pos,z], 1];
            k = Mod[pos, 5]; k = If[k == 0, 5, k];
            SitzeProPartei = ReplacePart[SitzeProPartei,
            Part[SitzeProPartei, k] + 1, k];
```

```
        Quotientenliste = ReplacePart[Quotientenliste, 0, pos],
        {Sitze}];
    Return[SitzeProPartei]]
```

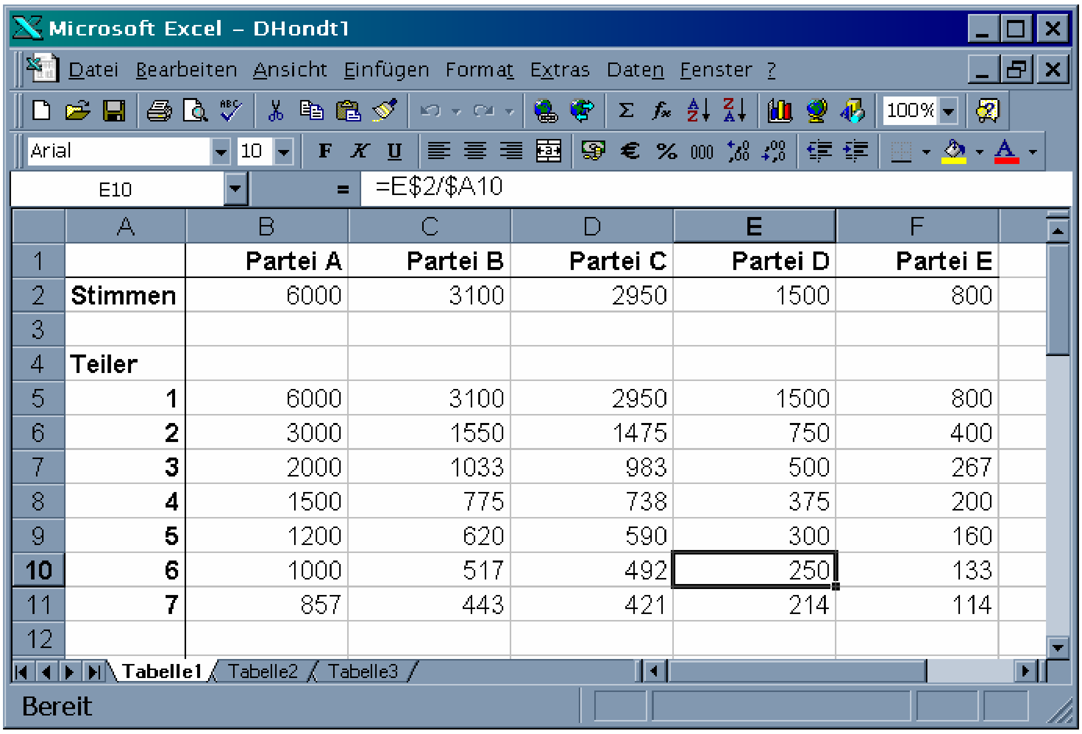
Angenommen, bei einer Wahl hätte die 1. Partei 6000, die 2. Partei 3100, die dritte Partei 2950, die vierte Partei keine und die fünfte Partei 1999 Stimmen erhalten. Wenn insgesamt 11 Sitze zu verteilen sind, würde ein Aufrufbeispiel dann so aussehen:

```
DHondt[{6000, 3100, 2950, 0, 1999}, 11]
```

```
Ergebnis: {5,3,2,0,1}
```

Die erste Partei erhält also 5, die zweite Partei erhält 3, die dritte Partei 2 Sitze, die vierte Partei erhält keinen und die fünfte Partei erhält einen Sitz.
Im Mathematica-Notebook ist `SitzeProPartei` die Liste, die die Sitze pro Partei enthält. Zu Beginn des Progamms erhält keine Partei einen Sitz (`SitzeProPartei={0, 0, 0, 0, 0}`). Während des Programmlaufs werden die Komponenten entsprechend „hochgezählt".
Der Schlüsselpunkt im Notebook ist die Ermittlung, zu welcher Partei der Quotient in der „Gesamtliste `Quotientenliste`" gehört.
Mit ein paar Kenntnissen aus der elementaren Zahlentheorie geht es sehr elegant. Man ermittle die Position des Maximum in der Liste `Quotientenliste`. Diese Zahl, die zwischen 1 und 5s liegen muss, teile man durch 5. Der dabei entstehende Rest gibt an, aus welcher Partei dieser Quotient stammt. Einzige Ausnahme: Der Rest ist 0. In diesem Fall gehört der Quotient zur 5. Partei. In Mathematica wird der Rest durch die Funktion `Mod[a, b]` ermittelt. `Mod[a, b]` ist der Rest bei der Divison von a durch b.

Ein anderes Software-Werkzeug, mit dem man das d'Hondtsche Verfahren bearbeiten kann, ist die **Tabellenkalkulation**, deren besonderer Vorteil in der hohen Interaktivität liegt. Für fünf Parteien könnte es etwa so aussehen:



	A	B	C	D	E	F
1		Partei A	Partei B	Partei C	Partei D	Partei E
2	Stimmen	6000	3100	2950	1500	800
3						
4	Teiler					
5	1	6000	3100	2950	1500	800
6	2	3000	1550	1475	750	400
7	3	2000	1033	983	500	267
8	4	1500	775	738	375	200
9	5	1200	620	590	300	160
10	6	1000	517	492	250	133
11	7	857	443	421	214	114
12						

Abb.1

Diese Umsetzung liegt nahe, weil man genauso von Hand das Verfahren durchführen würde. Aus eigener Erfahrung weiß ich, dass es opportun ist, im Unterricht mit dieser Möglichkeit zu beginnen. Allerdings werden nur die Quotienten (in der Literatur wird auch von Höchstzahlen gesprochen) ermittelt. Die tatsächliche Ermittlung der Sitze muss hier also interaktiv von Hand erfolgen.

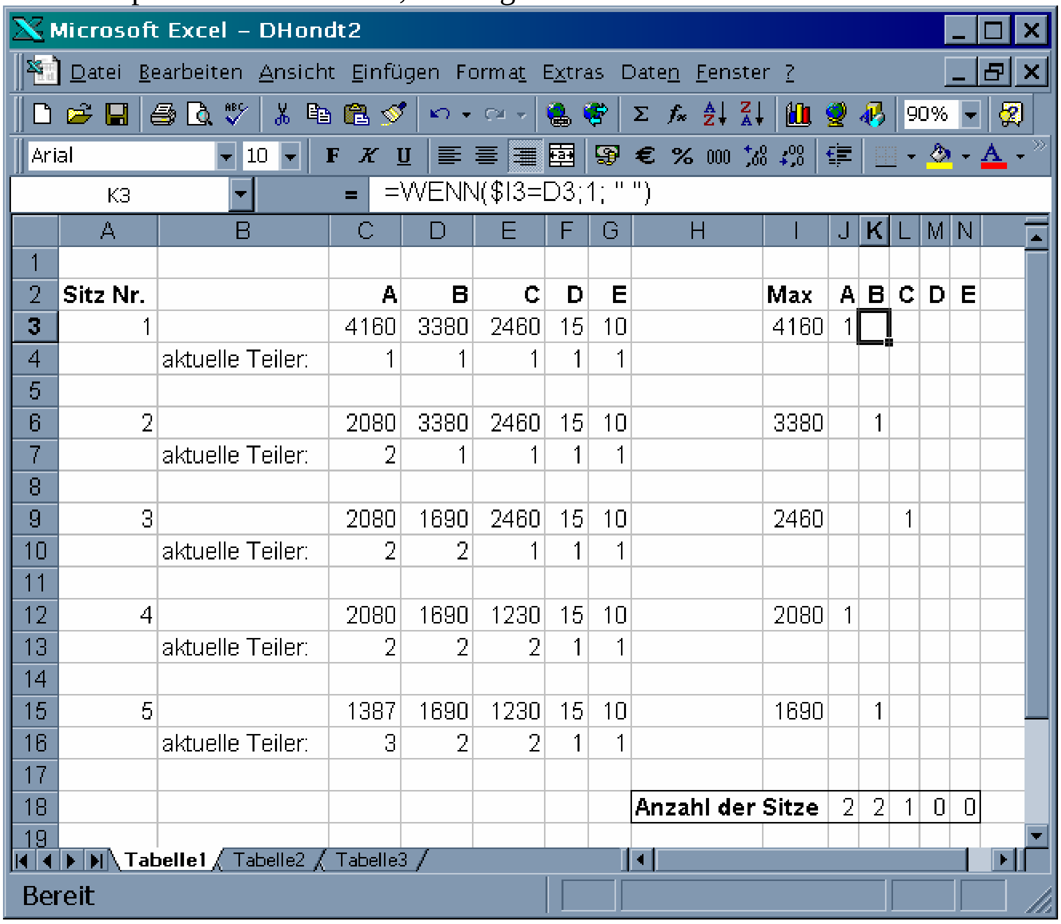
An dieser Stelle wird deutlich, wie viele Zeilen eigentlich benötigt werden. Ein Extrembeispiel hilft weiter: Nehmen wir an, eine Partei hätte so viele Stimmen, dass sie alle Sitze bekommen müsste. Dann wären die Höchstzahlen, die für die Sitzverteilung in Frage kämen, alle in einer Spalte. Es sind also höchstens so viele Zeilen notwendig, wie Sitze zu verteilen sind.

Damit das Tabellenblatt nun automatisch die Anzahl der Sitze ermittelt, müsste man ein „Makro“ verwenden, ohne Spezialkenntnisse jedoch kaum möglich und damit für die Sekundarstufe I eher ungeeignet.

Eine andere Möglichkeit, das d'Hondtsche Verfahren mittels Tabellenkalkulation zu simulieren, geht von einer anderen „Strategie“ aus (vgl. Abb. 2):

Bei dieser Version wurden der Übersicht wegen unter den Höchstzahlen noch die aktuellen Teiler dazugeschrieben. Es ist klar, dass die Höchstzahlen je Partei streng monoton fallende Folgen sind. Es wird nun nicht unter allen Höchstzahlen das Maximum gesucht, sondern zunächst nur unter den Höchstzahlen des Teilers 1, also unter den absoluten Stimmen selbst. Dann wird „zeilenweise“ vorgegangen. Das Maximum der Höchstzahlen, die zum Teiler 1 gehören, wird durch 2 geteilt, alle anderen Höchstzahlen des Teilers 1 werden in die nächste Zeile (Zeile 6!) übernommen. In dieser nächsten Zeile wird nun wieder das Maximum gesucht (die Maxima werden in der Spalte „I“ angezeigt). Dieses Maximum wird nun durch den nächstgrößeren Teiler geteilt und in die übernächste Zeile (hier Zeile 9) übernommen. Die anderen Höchstzahlen aus der vorangegangenen Zeile werden wieder übernommen usw.

Hier ein Beispiel für fünf Parteien, die insgesamt fünf Sitze erhalten:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	Sitz Nr.		A	B	C	D	E		Max	A	B	C	D	E
3	1		4160	3380	2460	15	10		4160	1				
4		aktuelle Teiler:	1	1	1	1	1							
5														
6	2		2080	3380	2460	15	10		3380		1			
7		aktuelle Teiler:	2	1	1	1	1							
8														
9	3		2080	1690	2460	15	10		2460			1		
10		aktuelle Teiler:	2	2	1	1	1							
11														
12	4		2080	1690	1230	15	10		2080	1				
13		aktuelle Teiler:	2	2	2	1	1							
14														
15	5		1387	1690	1230	15	10		1690		1			
16		aktuelle Teiler:	3	2	2	1	1							
17														
18								Anzahl der Sitze		2	2	1	0	0
19														

Abb. 2

In die Zellen C3, D3, E3, F3 und G3 werden die absoluten Stimmen für die entsprechenden Parteien A, B, C, D und E eingetragen. Den Rest macht das Tabellenkalkulationsblatt von selbst.
Im Folgenden sind noch die Formeln für einige ausgewählte Zellen dargestellt:

I3: =MAX(C3:G3)
J3: =WENN($I3=C3;1; " ")
A6: =A3+1
C6: =WENN($I3=C3;C$3/(C4+1);C3)
C7: =WENN($I3=C3;C4+1;C4)
J18: =SUMME(J3:J15)

Die Formeln in den anderen Zellen erhält man durch die typischen Tabellen-Operationen „Bearbeiten/Kopieren“ und „Bearbeiten/Einfügen“ bzw. durch „Bearbeiten/Ausfüllen/Rechts“.

Eine interaktive Nachbearbeitung ist in der zweiten Version des Tabellenblattes dennoch notwendig: Sollten sich in einer Zeile zwei oder mehrere gleiche Höchstzahlen befinden, so würden jeweils mehrere Parteien einen Sitz erhalten, d.h. in einer Zeile der Spalten J, K, L, M und N stünde auch mehrmals die Zahl 1. Nach der Gesetzeslage erhält aber nicht jede Partei mit der größten Höchstzahl einen Sitz, sondern hier muss das Los entscheiden. Im konkreten Kalkulationsblatt bedeutet dies, dass auf der Basis eines konkreten Zufallsprozesses, z.B. Münzwurf, alle bis auf eine 1 in den Spalten J bis N manuell gelöscht werden müssten.

Es stellt sich natürlich hier die Frage, wie man auf so ein Verfahren, wie das von d'Hondt, eigentlich kommt und ob es auch wirklich repräsentativ ist. Bekommt also z.B. eine Partei mit der halben Stimmenzahl auch wirklich immer die Hälfte der Sitze? Mehr noch: Ist so ein Verfahren auch „verhältnistreu“? Findet man in Parlamenten auch wirklich das gleiche Verhältnis der Sitze wie das Verhältnis der Wählerstimmen zueinander? Auf diese Fragen kann hier in diesem Beitrag aus Platzgründen nicht eingegangen werden. Es sei hier z.B. auf KOPFERMANN (1991) oder NIEMEYER (1998) hingewiesen.

Das nächste Verfahren liegt auf den ersten Blick dem Repräsentationsprinzip bzw. der Verhältnistreue näher.

2.3 Das Hare-Niemeyer Verfahren

Thomas Hare (1806-1891) war englischer Verfassungsjurist; das von ihm beschriebene Verfahren ist eigentlich ein anderes, das aber zum gleichen Ergebnis führt. Horst Niemeyer (geb. 1931) ist emeritierter Professor für Mathematik an der RWTH Aachen.

In den Bundesländern Bayern, Berlin, Brandenburg, Bremen, Hamburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Sachsen-Anhalt und Thüringen werden die Sitze des Landtags, wie auch die des Bundestags, nicht nach dem d'Hondtschen Verfahren verteilt, sondern nach dem Verfahren von Hare und Niemeyer. In der Literatur liest man oft, dass es die kleineren Parteien bevorzugt, was allerdings ein Irrtum ist. Dazu ein Zitat von JAHNNKE, 1998, S. 17:

> *„...Zu diesen Vorurteilen gehört die Behauptung, das Niemeyer-Verfahren bevorzuge kleine Parteien. Mathematisch gibt es keinen Beleg für diese Behauptung: Das Verfahren ist neutral, es werden weder große noch kleine Parteien systematisch bevorzugt oder benachteiligt. Da aber das d’Hondtsche Verfahren die großen Parteien verhältnismäßig bevorzugt, schadet ihnen der Wechsel vom d’Hondt’schen Verfahren zum Niemeyer-Verfahren.“*

Bei dieser Variante wird die Zahl der Sitze proportional aus der Zahl der für die jeweilige Partei abgegebenen Stimmen berechnet. Die führt in der Regel jedoch zu „Kommazahlen“. Jede Partei erhält auf jeden Fall die vor dem Komma errechnete Anzahl von Sitzen. Die Restmandate werden entsprechend der Größe des Nachkomma-

Anteils verteilt (die Partei mit dem größten Nachkomma-Anteil erhält als erstes noch ein weiteres Mandat) bis alle Restmandate verteilt sind (vgl. BARTHOLOMÉ 1990).

Beispiel:

Partei	Stimmen
A	1000
B	3777
C	3444
D	555
E	6000

Insgesamt wurden also 14 776 Stimmen gegeben. Gesamtzahl der Sitze: 10.

Für jede Partei wird zunächst berechnet:

$$\frac{\textit{Stimmenzahl der Partei}}{\textit{Gesamtzahl der Stimmen aller Parteien}} \bullet \textit{Gesamtzahl der Sitze}$$

Partei A: 0,68 Partei B: 2,56 Partei C: 2,33 Partei D: 0,38 Partei E: 4,06

Zunächst ist die Stelle vor dem Komma abzulesen. Diese Ziffer sagt aus, wie viele Sitze jede Partei mindestens erhält.

Die dann noch zu vergebenden Sitze werden den Parteien in der Reihenfolge der größten Zahlenbruchteile hinter dem Komma zugeteilt.

In diesem Zahlenbeispiel erhalten (im zweiten Durchgang sozusagen) die Parteien A und B jeweils noch einen Sitz.
Insgesamt ergibt sich für die Sitzverteilung also:

Partei A:	1 Sitz
Partei B:	3 Sitze
Partei C:	2 Sitze
Partei D:	0 Sitze
Partei E:	4 Sitze

Man vergleiche dieses Zahlenbeipiel mit dem d'Hondtschen Verfahren:

```
DHondt[{1000, 3777, 3444, 555, 6000}, 10]

Ergebnis: {0,3,2,0,5}
```

3. Besonderheiten bei beiden Verfahren

Fast jeder von uns hat gewisse intuitive Anforderungen an Verteilungsverfahren, wie z.B. Monotonie und Proportionalität. Leider gibt es aber kein Verfahren, dass allen Anforderungen exakt gerecht wird. Bei jedem Verfahren gibt es mehr oder weniger unerwünschte Nebenwirkungen, von denen ein paar ausgewählte etwas näher vorgestellt werden.

Mathematisch gesehen, gehört das d'Hondtsche Verfahren zu den sog. Divisorenverfahren. Die Divisorenverfahren sind im Gegensatz zum Verfahren von Hare/Niemeyer nicht von dem im Folgenden beschriebenen Alabama-Paradoxon und „Neue-Parteien“-Paradoxon betroffen, wie die Beispiele aus KOPFERMANN, 1991, S.115 zeigen.

3.1 Das Alabama Parodoxon

Eine Partei (oder im anderen Zusammenhang, ein Staat) erhält bei gleichbleibender Stimmenverteilung weniger Sitze, obwohl die Sitzzahl des Hauses vergrößert wird.

Die meisten Menschen würden nicht erwarten, dass so etwas möglich ist, denn es widerspricht einer intuitiven Monotonievorstellung, die genau dies ausschließen sollte.

Die Bevölkerung der USA wuchs im 19. Jahrhundert stark an. Neue Lebensräume kamen hinzu, neue Arbeitsmöglichkeiten wurden durch die Industrialisierung geschaffen und Immigranten strömten ins Land. Die Zahl der Unionsstaaten wuchs von 16 im Jahre 1800 auf 45 im Jahre 1900 an, die Bevölkerung von 4,9 Millionen auf 74,6 Millionen. Der Kongress wuchs mit, wenn auch nicht proportional. Im Jahre 1800 kam auf jeweils 34680, im Jahre 1900 auf 193167 ein Repräsentant. Die Wirkungsweise der bekannten Verteilungsverfahren wurde laufend überprüft. Im Jahre 1880 merkte W. Seaton, erster Sekretär des Census Office, dass Alabama nach Anwendung von Vintons Methode von 1850 einen von 8 Sitzen im Repräsentanten verlieren würde, wenn man das Haus von 299 auf 300 Sitze vergrößert. Das Haus wird größer und Alabama verliert einen Sitz! Eine Flut von Diskussionen wurde ausgelöst.

Beispiel:

Stimmen	Anteil	7 Sitze	Quote	8 Sitze	Quote	9 Sitze	Quote
17175169	0,46	3	3,22	4	3,68	4	4,14
13190837	0,36	2	2,52	3	2,88	3	3,24
3615183	0,10	1	0,70	1	0,80	1	0,90
3129982	0,08	1	0,56	0	0,64	1	0,72

Die letzte Partei verliert bei Erhöhung von sieben auf acht Gesamtsitze ihren einzigen Sitz, obwohl sich der prozentuale Anteil nicht verändert hat!

3.2 Das „Neue-Parteien“-Paradoxon (New States Paradox)

Das Hare/Niemeyer-Verfahren ist so empfindlich, dass neue Parteien, die zwar an der Verrechnung teilnehmen, jedoch leer ausgehen, das Ergebnis der anderen Parteien beeinflussen können:

Die Mandatsverteilung verändert sich bei sonst gleichbleibender Stimmenverteilung, wenn eine neue, leer ausgehende Partei hinzukommt.

Beispiel:

Stimmen	Quoten	Sitze	Stimmen	Quoten	Sitze
4223	5,67	6	4223	5,49	5
3539	4,75	5	3539	4,60	5
1924	2,58	2	1924	2,50	3
-	-	-	314	0,41	0
9686		13	10000		13

Ein Vorteil des Hare/Niemeyer-Verfahren ist, dass es die Quotenbedingung bzw. die Minimal- und Maximalbedingung erfüllt. Die Quotenbedingung bedeutet, dass man von einem Sitzverteilungsverfahren erwarten wird, dass eine Partei zumindest ihren „ganzzahligen" Anspruch erhält und höchstens einen Sitz mehr.
Wie die letzten beiden Besonderheiten zeigen, könnte man meinen, dass das d'Hondtsche Verfahren nun des „gerechtere" sei, nur weil die beiden Fälle nicht auftreten können. Aber weit gefehlt! Auch bei diesem Verfahren können unerwünschte Phänomene auftreten. Im nächsten Abschnitt soll eines beschrieben werden:

3.3 Quotenkonstanz garantiert beim d'Hondtschen Verfahren keine Sitzkonstanz

Bei einer Wahl trete das folgende Wahlergebnis auf. Weiterhin sollen zwei Sitze vergeben werden (in Klammer: Nummer des zu vergebenden Sitzes):

Divisor	*Quotienten*		
	Partei A	*Partei B*	*Partei C*
1	*5 (1)*	*2*	*2*
2	*2,5* ***(2)***	*1*	*1*

Partei A erhält also zwei Sitze; die beiden anderen Parteien gehen leer aus.

Nehmen wir nun weiter an, dass bei der nächsten Wahl, die Wähler ihr Wahlverhalten ändern, dass z.B. ein Wähler der Partei C seine Stimme nun der Partei B gibt. Das Wahlergebnis sieht dann also folgendermaßen aus. Es sollen nach wie vor zwei Sitze vergeben werden:

Divisor	*Quotienten*		
	Partei A	*Partei B*	*Partei C*
1	*5 (1)*	*3* ***(2)***	*1*
2	*2,5*	*1,5*	*0,5*

Partei A erhält nur noch einen Sitz, Partei B den zweiten Sitz. Dabei hat Partei A keine Stimmen verloren!

Es gibt noch viele weitere Besonderheiten bzw. unerwünschte Phänomene bei beiden Verfahren, die man z.B. in MEYER, 1998 finden kann. Hier wurden exemplarisch nur drei aufgeführt. Sie zeigen aber, dass beide Verfahren nicht exakt „verhältnistreu“ sind.

Angenommen, man stellt an ein Repräsentationsverfahren nur die zwei folgenden Forderungen:

- Die Anzahl der Sitze entsteht aus der Quote durch Auf- oder Abrunden. Ist die Quote ganzzahlig, so erhält die Partei genau diese ganzzahlige Zahl an Sitzen.
- Wenn eine Partei mehr als oder gleiche viele Stimmen wie eine andere Partei erhält, so soll sie auch entsprechend mehr oder gleich viele Sitze erhalten.

Eigentlich sind die beiden Forderungen selbstverständlich und gering in ihrem Anspruch.
Michel L. Balinsiki und H. Peyton Young haben nun mit ihrem berühmten Unmöglichkeitssatz bewiesen, dass jedes Repräsationsverfahren, das beide Forderungen erfüllt, andere unerwünschte Nebenwirkungen hat. Gäbe es ein solches „ideales“ Verfahren, würden in Deutschland auch wohl kaum beide Verfahren immer noch parallel Verwendung finden.

Außerdem begünstigt das d'Hondtsche Verfahren in gewissem Umfang die größeren Parteien.

Weiterhin kann es beim d’Hondtschen Verfahren vorkommen, dass eine Partei zwar nicht weniger, jedoch aber mehr Sitze erhalten kann, als ihr nach ihrem gerundetem verhältnismäßigen Anteil zustehen. Die Maximalbedingung wird also nicht erfüllt (vgl. JAHNKE, 1998 / KOPFERMANN, 1991 / MEYER, 1998).

Das folgende Zahlenbeispiel spiegelt das Problem „Maximalbedingung“ deutlich wider und sei dem Leser als Übung überlassen:
Partei A hat 5950, Partei B 2530 und Partei C 1520 Stimmen erhalten. Insgesamt sind 10 Sitze zu vergeben. Ermitteln Sie die Sitzverhältnisse mit beiden Verfahren.

4. Unterrichtserfahrungen

Ich habe deshalb das d’Hondtsche Verfahren im Informatikunterricht in einer 8. Hauptschulklasse in Mannheim behandelt. Sie bestand aus insgesamt 30 Schülerinnen und Schülern. Aufgrund des Schulniveaus habe ich mich für die erste Tabellenkalkulationversion gemäß Abb. 1 entschieden.

Wegen der relativ großen Klassenstärke fand die erste Unterrichtsstunde zu diesem Thema zunächst nur im Klassenzimmer statt. Nach einem relativ simplen Einstieg (z.B. in der Art und Weise wie „was fällt Euch zum Thema Wahlen ein?“) beabsichtigte ich, mit ein paar ziemlich einfachen extremen Zahlenbeispielen die Schülerinnen und Schüler für den Sinn von Verteilungsverfahren zu sensiblisieren. Insbesondere ging es mir auch darum, die Idee der Proportionalität herauszuarbeiten. Ich begann mit dem folgenden Einstiegs-Beispiel:

„Angenommen, es gibt nur zwei Parteien. Partei A hat 500 Stimmen erhalten. Partei B hat ebenfalls 500 Stimmen erhalten. Es gibt 10 Sitze. Wie viele Sitze erhält jede Partei?“

Die Antwort ist so einfach wie das Zahlenbeispiel selbst. Das nächste Beispiel wurde deshalb etwas schwieriger.
„Partei A hat 600 Stimmen erhalten. Partei B hat 400 Stimmen erhalten. Es gibt 10 Sitze. Wie viele Sitze erhält jede Partei?“

Auch dieses Beispiel ist von sehr einfacher Struktur. Im folgenden Beispiel wurde das Niveau wurde wieder um einen Schritt erhöht:

„Partei A hat nun 650 Stimmen erhalten. Partei B hat 350 Stimmen erhalten. Wie viele Sitze erhält jede Partei?“

Die Schülerinnen und Schüler waren sich nicht ganz einig. Manche meinten, jede Partei solle noch einen Sitz erhalten, andere Schüler waren der Auffassung, dass dann eben keine Partei einen weiteren Sitz erhalten solle.

Ich teilte den Schülerinnen und Schüler mit, dass es verschiedene Verfahren gäbe, eines davon wäre das Verfahren nach d'Hondt. Wie bei jedem Algorithmus, der in eine entsprechende Programmierumgebung umgesetzt werden soll, ist es sinnvoll, ihn zunächst einmal ganz von Hand, evtl. mit einem Taschenrechner auszuführen, was in der verbleibenden Unterrichtsstunde auch gemacht wurde. Ein zweites (reines) Zahlenbeispiel folgte. Da diese Rechnungen relativ einfach und wiederholender Natur sind, wurde den Schülerinnen und Schülern klar, dass der Computer hier zu einer beträchtlichen Zeitersparnis führen könnte und damit sinnvoll erscheint.

Die Umsetzung mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsblattes erfolgte in der darauffolgenden Unterrichtsstunde mit halber Klassenstärke, aber immer noch zunächst im Klassenzimmer an der Tafel. Nach meiner bisherigen Erfahrung als Lehrer sind Hauptschüler zumeist überfordert, gleichzeitig einen Algorithmus in ein Tabellenblatt umzusetzen und einzutippen. Weiterhin wurden auch mehr Formeln als unbedingt notwendig eingetragen. Dies hatte den Vorteil, dass die Syntax des Tabellenkalkulationsprogramms wiederholt und geübt wurde. Dabei wurde eine Version erarbeitet, bei der entweder nur absolute oder nur relative Bezüge verwendet wurden. Dies hatte zwar den Nachteil, dass nur die Spalten nach unten ausgefüllt werden konnten, aber den Vorteil, dass das Niveau einfacher war.
Die zweite Hälfte der Unterrichtsstunde erfolgte (endlich) im Computerraum.

Die dritte Stunde (wieder nur mit halber Klassenstärke), fand ausschließlich im Computerraum statt. Die Schülerinnen und Schüler hatten die Aufgabe, nun mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogramms an mehreren Zahlenbeispielen die Anzahl der Sitze für die einzelnen Parteien zu ermitteln.
Mit einigen Schülerinnen und Schülern, die relativ schnell und sicher mit der Aufgabe „d'Hondt“ umgehen konnten, erarbeitete ich eine Tabellenblattversion wie in Abb. 1.

Die Version, wie in Abb. 2, erscheint mir für eine Hauptschulklasse zu schwierig und ist wohl eher für die Sekundarstufe II geeignet.

Ich danke Prof. Dr. J. Ziegenbalg, Herrn StR Th. Borys, sowie Herrn Ch. Urff und Herrn M. Alstadt für die kritische Beratung bei der Erstellung dieses Artikels.

5. Literatur

Bartholomé, Th. (1990): Lehren und Lernen mit dem Computer. Wie gerecht sind Wahlverfahren? Tübingen: Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen.

Bauer F.L. (1983): Das d'Hondtsche Verfahren; In: Informatik-Spektrum (6). München: 165-167.

Hentig, v. H. (2004): Einführung in den Bildungsplan 2004. In: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.): Bildungsplan für die Hauptschule (Hauptschule und Hauptschule mit Werkrealschule). Stuttgart: 9 - 10.

Jahnke, Th. (1998): Das Thema Wahlen im Mathematik- oder Projektunterricht. In: Jahnke, Th. (Hrsg.): Mathematik lehren, Heft 88: Wahlen. Seelze: Friedrich Verlag. 4 - 5.

Jahnke, Th. (1998): Was man zum Thema Wahlen wissen sollte. In: Jahnke, Th. (Hrsg.): Mathematik lehren, Heft 88: Wahlen. Seelze: Friedrich Verlag. 6 - 44.

Kopfermann, K. (1991): Mathematische Aspekte der Wahlverfahren. Mandatsverteilung bei Abstimmungen. Mannheim/Wien/Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

Meyer, J. (1998): Paradoxien beim Verhältniswahlrecht. In: Jahnke, Th. (Hrsg.): Mathematik lehren, Heft 88: Wahlen. Seelze: Friedrich Verlag. 45 - 49.

Niemeyer, H. (1998): Verhältniswahlverfahren. In: Jahnke, Th. (Hrsg.): Mathematik lehren, Heft 88: Wahlen. Seelze: Friedrich Verlag. 59 - 65.

Saari, D. G. (2001): Chaotic elections! A mathematician looks at voting. American Mathematical Society.

Woyke, W. (1996): Stichwort: Wahlen. Opladen: Leske + Budrich.

Ziegenbalg, J. (1996): Algorithmen. Von Hammurapi bis Gödel. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum. Akademischer Verlag. 16.

Internet:
http://www.landesregierung-sh.de/landesrecht/111-1.htm

http://www.wahlrecht.de

http://www.ph-karlsruhe.de/~ziegenbalg/MU-Heft-Algorithmen/